Séparateurs Algébriques dans la Bio-systémique

Annick Valibouze and Ines Abdeljaoued and Alia Ben Kahla

Paris VI - ESSAI -IPT

Colloque franco-tunisien de Mathématiques
Monastir 2009.

Table des matières

Système Dynamique Polynomial (SDP)

Definition

Soit k un corps fini (ensemble d'états). Un SDP de n noeuds est une fonction

$$F = (f_1, \ldots, f_n) : k^n \mapsto k^n$$

où $f_j : k^n \mapsto k$ est appelée fonction de transition associée au noeud j.

Série chronologique - Définitions

Soient $s = (s_1, \ldots, s_n) \in k^n, t = (t_1, \ldots, t_n) \in k^n$.

- Si $F(s) = t$ alors (s, t) est un état de transition de F. On note :

$$s \mapsto t.$$

- Une séquence $s_1 \mapsto \ldots \mapsto s_m$ d'états de transitions est appelée trajectoire discrète de longueur m.

Si $s_1 = s_m$ alors la trajectoire est un cycle de longueur m.

Si $m = 1$ alors on parle de point fixe.

Série chronologique - Définitions

Soient $s = (s_1, \ldots, s_n) \in k^n, t = (t_1, \ldots, t_n) \in k^n$.

- Si $F(s) = t$ alors (s, t) est un état de transition de F. On note :
$$s \mapsto t.$$
- Une séquence $s_1 \mapsto \ldots \mapsto s_m$ d'états de transitions est appelée trajectoire discrète de longueur m.

Si $s_1 = s_m$ alors la trajectoire est un cycle de longueur m.

Si $m = 1$ alors on parle de point fixe.

Série chronologique - Définitions

Soient $s = (s_1, \ldots, s_n) \in k^n, t = (t_1, \ldots, t_n) \in k^n$.

- Si $F(s) = t$ alors (s, t) est un état de transition de F.
  On note :
  $$s \mapsto t.$$
- Une séquence $s_1 \mapsto \ldots \mapsto s_m$ d'états de transitions est appelée trajectoire discrète de longueur m.

Si $s_1 = s_m$ alors la trajectoire est un cycle de longueur m.

Si $m = 1$ alors on parle de point fixe.

Série chronologique - Définitions

Soient $s = (s_1, \ldots, s_n) \in k^n, t = (t_1, \ldots, t_n) \in k^n$.

- Si $F(s) = t$ alors (s, t) est un état de transition de F. On note :
$$s \mapsto t.$$
- Une séquence $s_1 \mapsto \ldots \mapsto s_m$ d'états de transitions est appelée trajectoire discrète de longueur m.

Si $s_1 = s_m$ alors la trajectoire est un cycle de longueur m.

Si $m = 1$ alors on parle de point fixe.

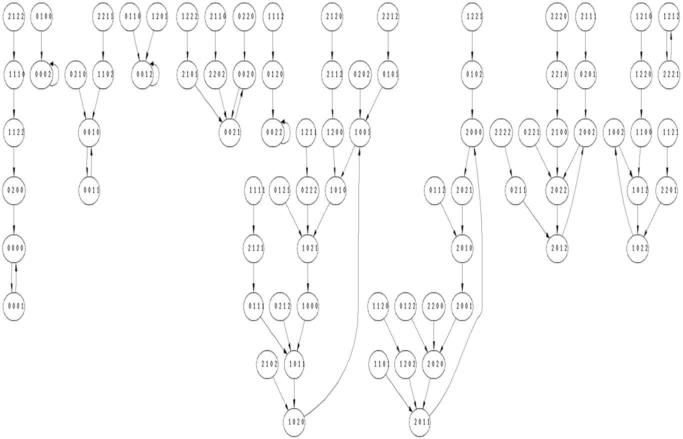

FIGURE: Graphe des états de transition $S(F)$ pour $n = 4$ et $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Table des matières

Table des matières

Ingénierie Inversée - Problématique

Soient k un corps fini et

$V = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m \mid s_i \in k^n, 1 \leq i \leq m\}$ une trajectoire de longueur m représentant des données d'un réseau biochimique de n noeuds :

- Trouver $F = (f_1, \dots, f_n) : k^n \mapsto k^n$ tel que $F(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_{i+1}$ pour i entre 1 et $m-1$.

$$\Rightarrow 1 \leq j \leq n \quad \begin{array}{rccl} f_j : & k^n & \rightarrow & k \\ & s_i & \mapsto & f_j(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_{i+1,j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-1 \end{array}$$

Ingénierie Inversée - Problématique

Soient k un corps fini et

$V = \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_m \mid s_i \in k^n, 1 \leq i \leq m\}$ une trajectoire de longueur m représentant des données d'un réseau biochimique de n noeuds :

- Trouver $F = (f_1, \ldots, f_n) : k^n \mapsto k^n$ tel que $F(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1}$ pour i entre 1 et $m-1$.

$$\Rightarrow 1 \leq j \leq n \quad f_j : \begin{array}{ccc} k^n & \to & k \\ s_i & \mapsto & f_j(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1,j} \end{array} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-1$$

Ingénierie Inversée - Problématique

Soient k un corps fini et

$V = \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_m \mid s_i \in k^n, 1 \leq i \leq m\}$ une trajectoire de longueur m représentant des données d'un réseau biochimique de n noeuds :

- Trouver $F = (f_1, \ldots, f_n) : k^n \mapsto k^n$ tel que $F(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_{i+1}$ pour i entre 1 et $m - 1$.

$$\Rightarrow 1 \leq j \leq n \quad f_j : \begin{array}{ccc} k^n & \rightarrow & k \\ s_i & \mapsto & f_j(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_{i+1,j} \end{array} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-1$$

Ingénierie Inversée - Solution

- Soit k un corps fini. Toute collection de points de k est une variété affine. Tout ensemble de polynômes de $k[x_1, \dots, x_n]$ qui s'annulent en ces points a une structure algébrique d'un idéal.

$\Rightarrow$ $\{g \in k[x_1, \dots, x_n] : g(\mathbf{s}_i) = 0 \ , \forall i \in [1, m-1]\}$ est l'idéal de la variété affine $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{m-1}\}$.

Ingénierie Inversée - Solution

- Soit k un corps fini. Toute collection de points de k est une variété affine. Tout ensemble de polynômes de $k[x_1, \ldots, x_n]$ qui s'annulent en ces points a une structure algébrique d'un idéal.

$\Rightarrow$ $\{g \in k[x_1, \ldots, x_n] : g(\boldsymbol{s}_i) = 0 \ , \forall i \in [1, m-1]\}$ est l'idéal de la variété affine $\{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{m-1}\}$.

Interpolation

Chercher F tel que $F(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1}$ revient à

- Trouver $f_1, \ldots, f_n : k^n \mapsto k$ simultanément avec $f_j(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1,j}$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq n$.

$\Rightarrow$ Il suffit de trouver un polynôme f_j de $k[x_1, \ldots x_n]$ tel que

$$f_j(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1,j}$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq n$.

Interpolation

Chercher F tel que $F(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1}$ revient à

- Trouver $f_1, \ldots, f_n : k^n \mapsto k$ simultanément avec $f_j(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1,j}$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq n$.

$\Rightarrow$ Il suffit de trouver un polynôme f_j de $k[x_1, \ldots x_n]$ tel que

$$f_j(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1,j}$$

pour tout $1 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq n$.

Une solution possible est donnée par :

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{s}_{i+1,j}\; r_i(x_1, \ldots, x_n)$$

où les $r_i(x_1, \ldots, x_n)$ sont des polynômes séparateurs associés à V : $r_i(\boldsymbol{s}_i) = 1$ et $r_i(\boldsymbol{s}_j) = 0$ pour tout $\boldsymbol{s}_j \in V$ et $1 \leq i \leq m-1$.

TABLE: Evolution de la concentration de 3 protéines dans le temps

Code protéine	**6348**	**5606**	**5601**
concentration à 0h	19204,3	7258,53	1456,75
concentration à 3h	30590,7	13993,1	1254,47
concentration à 6h	21466,9	9777,97	1407,16
concentration à 12h	13859	7897,34	1663,16
concentration à 24h	6506,74	6250,73	1841,73

TABLE: Exemple de discrétisation avec $n = 3$, $m = 5$ et $p = 5$

Code protéine	1 **6348**	2 **5606**	3 **5601**	
0h	2	1	2	$\leftarrow \boldsymbol{s}_1$
3h	4	4	0	$\leftarrow \boldsymbol{s}_2$
6h	3	3	1	$\leftarrow \boldsymbol{s}_3$
12h	1	2	3	$\leftarrow \boldsymbol{s}_4$
24h	0	0	4	$\leftarrow \boldsymbol{s}_5$
	$\uparrow$ t_1	$\uparrow$ t_2	$\uparrow$ t_3	

Base de Gröbner et Idéal de la Variété V

Supposons $f, g : k^n \mapsto k$ tels que $\forall \boldsymbol{s}_i \in V$:
$f(\boldsymbol{s}_i) = g(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1,j}$.

$$\text{Alors} \begin{cases} (f-g)(s_i) = 0 & \text{avec } 1 \leq i \leq m-1 \quad \text{et} \\ g = f - h & \text{avec } h = f - g. \end{cases}$$

Si nous connaissons f alors g s'écrit sous la forme d'une somme de f et d'un polynôme h s'annulant en $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{m-1}$.

Base de Gröbner et Idéal de la Variété V

Supposons $f, g : k^n \mapsto k$ tels que $\forall \boldsymbol{s}_i \in V$:
$f(\boldsymbol{s}_i) = g(\boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{s}_{i+1,j}$.

$$\text{Alors} \begin{cases} (f - g)(s_i) = 0 & \text{avec } 1 \leq i \leq m - 1 \quad \text{et} \\ g = f - h & \text{avec } h = f - g. \end{cases}$$

Si nous connaissons f alors g s'écrit sous la forme d'une somme de f et d'un polynôme h s'annulant en $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{m-1}$.

Algorithme de Buchberger-Möller

Entrée : Une variété V, un ordre sur les termes $>$

Objectifs : 1) Calculer une base de Gröbner de $I(V)$ par rapport à $>$,

2) Calculer les séparateurs de V.

- Complexité de BM : $O(nm^3 + n^2m^3)$.
- Logiciel : Macaulay2, Cocoa, etc.

Algorithme de Buchberger-Möller

Entrée : Une variété V, un ordre sur les termes $>$

Objectifs : 1) Calculer une base de Gröbner de $I(V)$ par rapport à $>$,

2) Calculer les séparateurs de V.

- Complexité de BM : $O(nm^3 + n^2m^3)$.
- Logiciel : Macaulay2, Cocoa, etc.

Algorithme de Buchberger-Möller

Entrée : Une variété V, un ordre sur les termes $>$

Objectifs : 1) Calculer une base de Gröbner de $I(V)$ par rapport à $>$,

2) Calculer les séparateurs de V.

- Complexité de BM : $O(nm^3 + n^2m^3)$.
- Logiciel : Macaulay2, Cocoa, etc.

Table des matières

Introduction

Soient $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathcal{E} = k^n$ l'ensemble des p^n états et $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{E}$.
L'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}}$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ des $\boldsymbol{s}$-relations est engendré par $\boldsymbol{p} = \{p_1, \ldots, p_n\}$:

$$p_1 = x_1 - s_1, \ldots, p_n = x_n - s_n$$

appelés par N. Tchebotarev les *modules fondamentaux* de $\boldsymbol{s}$.

Ils satisfont pour tout $\boldsymbol{t} \in \mathcal{E}$:

$$\forall j \in [1, n] \quad p_j(\boldsymbol{t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{s} \quad . \tag{1}$$

La variété de $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}}$ est réduite au seul élément $\boldsymbol{s}$.

Definition

Soit $V = \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_m\}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ représentant une trajectoire. Un polynôme $r(\boldsymbol{x})$ appartenant à $k[x_1, \ldots, x_n]$ qui vaut 1 en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}$ et 0 en les autres éléments de V est appelé un (polynôme) séparateur de $\boldsymbol{s}$ dans V.

Definition

- Soit J, l'ensemble des indices j pour lesquels tous les éléments de V possèdent la même j-ième coordonnée :

$$J := \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid \forall l \in [1, m] \quad s_{l,j} = s_{1,j}\} \quad ;$$

  sur les coordonnées indicées par j aucune séparation ne sera possible.

- Fixons $S := \{1, \ldots, n\} \backslash J$, le sous-ensemble minimal $\{1, \ldots, n\}$ séparant les éléments V ; nous l'appellerons l'ensemble séparateur de V.

Definition

- Soit J, l'ensemble des indices j pour lesquels tous les éléments de V possèdent la même j-ième coordonnée :

$$J := \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid \forall l \in [1, m] \quad s_{l,j} = s_{1,j}\} \quad ;$$

  sur les coordonnées indicées par j aucune séparation ne sera possible.
- Fixons $S := \{1, \ldots, n\} \setminus J$, le sous-ensemble minimal $\{1, \ldots, n\}$ séparant les éléments V ; nous l'appellerons l'ensemble séparateur de V.

Theorem

Soit le polynôme

$$g(\boldsymbol{x}) = \prod_{j \in S} \prod_{l \in E} (p_j(\boldsymbol{x}) - l)$$

*où S est l'ensemble séparateur de V et E l'ensemble des valeurs non nulles prises par les points de V en les polynômes engendrant l'idéal des **s**-relations (hormis ceux inutiles à la séparation) :*

$$E = \{p_j(\boldsymbol{t}) \mid j \in S\ ;\ p_j(\boldsymbol{t}) \neq 0\ ;\ \boldsymbol{t} \in V\} \subset \{1, \ldots, p-1\} \quad .$$

Alors le polynôme

$$r(\boldsymbol{x}) := \frac{g(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{s})}$$

Démonstration.

Nous avons $g(\boldsymbol{s}) \neq 0$ et donc $r(\boldsymbol{s}) = 1$. En effet, pour tout $j \in S$ et $l \in E$, $p_j(\boldsymbol{s}) - l = -l \neq 0$ et, l'entier p étant premier, tout produit $\prod_{l \in E} -l$ ne peut s'annuler dans k puisque $E \subset \{1, \ldots, p-1\}$. Soit maintenant $\boldsymbol{t} \in V \backslash \{\boldsymbol{s}\}$, alors il existe $j \in [1, n]$ tel que $p_j(\boldsymbol{t}) \neq 0$; par définition de E, $l = p_j(\boldsymbol{t}) \in E$; puisque le facteur $p_j(\boldsymbol{x}) - l$ de g s'annule en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$, nous parvenons à l'identité $r(\boldsymbol{t}) = g(\boldsymbol{t}) = 0$; ce qui termine la démonstration. $\square$

Table des matières

Supposons, pour simplifier, que l'ensemble séparateur S de V est $\{1, \ldots, n\}$. Dans le cas $p = 2$, E est réduit à $\{1\}$ et les séparateurs sont sous une forme plus compacte :
Soient les polynômes de $k[x_1, \ldots, x_n]$ donnés par

$$\begin{aligned} q &= \sum_{r=1}^{n} e_r(\boldsymbol{p}) \quad \text{et} \\ r &= q + 1 \end{aligned}$$

où $e_1(\boldsymbol{p}), \ldots, e_n(\boldsymbol{p})$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les éléments de $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$.

Alors pour tout $\boldsymbol{t} \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{t}) &= 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{t} = \boldsymbol{s} \\ r(\boldsymbol{t}) &= 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{s} \end{aligned} \quad .$$

En particulier, $q(\boldsymbol{t}) = 1 \quad \forall \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{s}$ et $r(\boldsymbol{s}) = 0$. Pour constater ces propriétés sur q et r, considérons le polynôme g univarié en y, à coefficients dans $k[x_1, \ldots, x_n]$ dont les racines sont les modules fondamentaux, s'exprimant ainsi :

$$g(y)(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} (y - p_j(\boldsymbol{x})) \quad .$$

Pour tout $t \in \mathcal{E}$, nous avons la suite d'équivalences :

$$g(1)(\boldsymbol{t}) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in [1, n] \;: p_j(\boldsymbol{t}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{s} \quad .$$

Donc $g(1)$ est un polynôme séparateur pour $\boldsymbol{s}$ dans $\mathcal{E}$. Par ailleurs, d'après l'identité suivante sur les coefficients des polynômes univariés :

$$g(y) = y^n - e_1(\boldsymbol{p}) \cdot y^{n-1} + e_2(\boldsymbol{p}) \cdot y^{n-2} \cdots + (-1)^n \cdot e_n(\boldsymbol{p}) \quad ,$$

nous avons $r = g(1) = q + 1$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exemple

Soient $m = 3$, $\boldsymbol{s}_1 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{s}_2 = (1, 1, 0)$ et $\boldsymbol{s}_3 = (0, 1, 1)$. Les ensembles de module fondamentaux associés à chaque état $\boldsymbol{s}_i$ étant noté $\boldsymbol{p}_i$, nous obtenons :

$$\boldsymbol{p}_1 = \{x_1, x_2 + 1, x_3 + 1\} \quad et \quad \boldsymbol{p}_2 = \{x_1 + 1, x_2 + 1, x_3\}.$$

Les fonctions symétriques élémentaires de $\boldsymbol{p}_1$ sont :
$e_1(\boldsymbol{p}_1) = x_1 + x_2 + x_3$, $e_2(\boldsymbol{p}_1) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3 + 1$ et $e_3(\boldsymbol{p}_1) = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$; donc le séparateur de $\boldsymbol{s}_1$ est

$$r_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_2x_3$$

De même, nous trouvons le séparateur r_2 de $\boldsymbol{s}_2$:

$$r_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2 \quad .$$

Pour $t_1 = (1,0)$, $t_2 = (1,1)$ et $t_3 = (0,1)$, nous obtenons $f_1 = r_1, f_2 = r_1 + r_2$ et $f_3 = r_2$. Ainsi, $f = (f_1, f_2, f_3)$ est définie par :

$$f_1 = x_1x_2x_3 + x_2x_3 \quad , \quad f_2 = x_1x_2 + x_2x_3 \quad \text{et} \quad f_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2.$$

Le support de chacune des composantes du système dynamique polynomial f permet de tracer le graphe de dépendance.

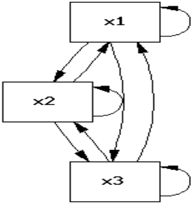

FIGURE: Graphe de dépendance pour $f = (x_1x_2x_3 + x_2x_3, f_2 = x_1x_2 + x_2x_3, f_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2)$.

Le graphe des états de transition est

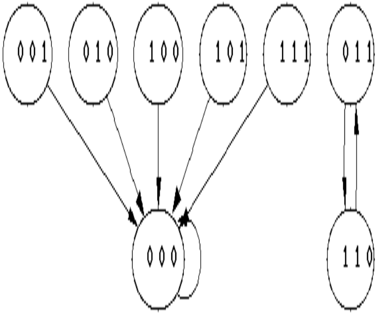

FIGURE: Graphe des états de transition de
$f = (x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3, f_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3, f_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2)$.

Notons que sur Cocoa, il nous faut considérer les états $\boldsymbol{s}_1$ et $\boldsymbol{s}_2$ qui donnent $r_1 = x_3$ et $r_2 = x_2 + x_3$. D'où, en tenant compte de $\boldsymbol{s}_3 : f = (x_3, x_2, x_2 + x_3)$.

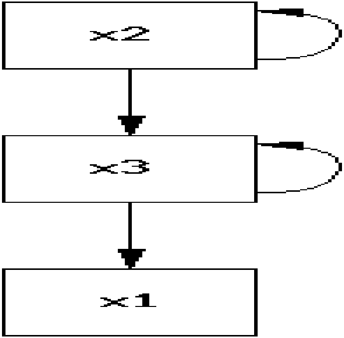

FIGURE: *Graphe des intéractions de* $f = (x_3, x_2, x_2 + x_3)$ *pour* $n = 3$, $m = 3$ *et* $p = 2$

Table des matières

Définitions

Notons l'*ensemble séparateur de* $\boldsymbol{s}$ *et* $\boldsymbol{t}$ deux points distincts de V :

$$S(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \{j \in S \mid s_j \neq t_j\} = \{j \in S \mid p_j(\boldsymbol{t}) \neq 0\} \quad ,$$

où S est l'ensemble séparateur de V ;

Exemple

Considérons les états $\boldsymbol{s}_1 = (2, 1, 2)$, $\boldsymbol{s}_2 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{s}_3 = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{s}_4 = (1, 2, 0)$. Nous avons $n = 3$ et $S = \{1, 2, 3\}$.

$$S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \{1, 3\} \quad S(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_4) = \{2\}$$

et

$$S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_3) = S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_4) = S(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3) = S(\boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4) = \{1, 2, 3\}$$

L'*ensemble initial des polynômes séparateurs de **s** et **t***

$$PS(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) = \{p_{\boldsymbol{t},j}(\boldsymbol{x}) \mid j \in S(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\} \quad ;$$

où $p_{\boldsymbol{t},j}(\boldsymbol{x}) = x_j - t_j$;
pour tout $g \in PS(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$, puisque $j \in S(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$, nous avons $g(\boldsymbol{s}) = -p_{\boldsymbol{t},j}(\boldsymbol{s})$ ce qui implique que $g(\boldsymbol{s}) neq 0$ et donc $g(\boldsymbol{t}) = 0$; tout produit de séparateur initial de $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ est un séparateur de ces deux points.

Exemple d'ensembles initiaux de polynômes séparateurs

$$PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \{x_1 - 1, x_3\}$$

$$PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_3) = \{x_1, x_2, x_3 - 1\}$$

$$PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_4) = \{x_1 - 1, x_2 - 2, x_3\}.$$

Un *ensemble initial minimal séparant* $\boldsymbol{s}$ *dans* V, noté $Min(\boldsymbol{s}, V)$ est composé d'au plus $m - 1$ polynômes (distincts) g tels que pour chaque $\boldsymbol{t} \in V$ distinct de $\boldsymbol{s}$, il existe un et un seul élément de $Min(\boldsymbol{s}, V)$ appartenant à $PS(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$;
pour chaque $\boldsymbol{t}$ dans V distinct de $\boldsymbol{s}$, l'intersection de $Min(\boldsymbol{s}, V)$ avec $PS(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ est réduite à un et un seul élément.

$$S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \{1, 3\}, \quad S(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_4) = \{2\}$$

et

$$S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_3) = S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_4) = S(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3) = S(\boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4) = \{1, 2, 3\}.$$

$$PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_4) = \{x_1 - 1, x_2 - 2, x_3\},$$

$PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \{x_1 - 1, x_3\}$ et $PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_3) = \{x_1, x_2, x_3 - 1\}$.
Voici quelques ensembles initiaux minimaux de $\boldsymbol{s}_1$ dans V (on peut tous les énumérer dans un cadre fini) :

$$\{x_1 - 1, x_1\} \quad \{x_1 - 1, x_2\} \quad \{x_3, x_2\}.$$

Theorem

Soit $Min(\mathbf{s}, V)$ un ensemble minimal séparant $\mathbf{s}$ dans V, et soit

$$\mathcal{G} = \prod_{g \in Min(\mathbf{s}, V)} g$$

alors

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{G}(\mathbf{x})}{\mathcal{G}(\mathbf{s})}$$

est un séparateur pour $\mathbf{s}$ dans V.

$$S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \{1, 3\}, \quad S(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_4) = \{2\}$$

et

$$S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_3) = S(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_4) = S(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3) = S(\boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4) = \{1, 2, 3\}.$$

$$PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_4) = \{x_1 - 1, x_2 - 2, x_3\},$$

$PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \{x_1 - 1, x_3\}$ et $PS(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_3) = \{x_1, x_2, x_3 - 1\}$.
Voici quelques ensembles initiaux minimaux de $\boldsymbol{s}_1$ dans V (on peut tous les énumérer dans un cadre fini) :

$$\{x_1 - 1, x_1\} \quad \{x_1 - 1, x_2\} \quad \color{red}{\{x_3, x_2\}}.$$

A partir de l'ensemble minimal $\{x_3, x_2\}$ de $\boldsymbol{s}_1$ dans V, nous obtenons le polynôme

$$r_1 = \frac{x_2 x_3}{2} = -x_2 x_3$$

valant 1 en $\boldsymbol{s}_1$ et 0 ailleurs dans V. C'est le même que celui trouvé par Cocoa.

Notons que les séparateurs obtenus par ce théorème sont de degré $\leq n$ alors que ceux obtenus par le théorème précédent sont de degré $\leq n.\#E$. Par exemple, pour $n = 3$ et $E = \{1, 2\}$, $n.\#E = 6$ et le séparateur de s_1 obtenu par le théorème 1 est

$$r_1 = -x_1(x_1 - 1)(x_2 - 2)x_2x_3(x_3 - 1).$$

En partant de 3 produits de gènes x_1, x_2 et x_3 appartenant à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et la séquence de 5 temps suivantes :
$\boldsymbol{s}_1 = (2, 1, 2)$; $\boldsymbol{s}_2 = (1, 1, 0)$; $\boldsymbol{s}_3 = (0, 0, 1)$; $\boldsymbol{s}_4 = (1, 2, 0)$ et $\boldsymbol{s}_5 = (0, 0, 1)$, nous obtenons avec Cocoa (méthode de Laubenbacher et Stigler) que les séparateurs de l'espace projectif en les points $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$ et $\boldsymbol{s}_4$ sont respectivement :

$$r_1(x_1, x_2, x_3) = -x_2x_3,$$

$$r_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2,$$

$$r_3(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 + x_3^2,$$

$$r_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_3.$$

Partant des modules fondamentaux associés repectivement à $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$ et $\boldsymbol{s}_4$:

$$\boldsymbol{p}_1 = \{x_1 + 1, x_2 - 1, x_3 + 1\},$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \{x_1 - 1, x_2 - 1, x_3\},$$

$$\boldsymbol{p}_3 = \{x_1, x_2, x_3 - 1\},$$

$$\boldsymbol{p}_4 = \{x_1 - 1, x_2 + 1, x_3\}.$$

Nous obtenons avec la méthode algébrique la même chose pour le premier séparateur :

$$r_1(x_1, x_2, x_3) = \; - \mathbf{x_2 x_3},$$

$$r_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2,$$
$$r_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + x_3,$$
$$r_4(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 + x_2.$$

Les ensembles initiaux des polynômes séparateurs de s_4 sont

$$PS(\boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{s}_1) = \{x_1 - 2, x_2 - 1, x_3 - 2\}$$

$$PS(\boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{s}_2) = \{x_2 - 1\} \quad PS(\boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{s}_3) = \{x_1, x_2, x_3 - 1\}.$$

Notons que nous obtenons beaucoup de choix de manière presque naturelle. Par exemple, des sépaateurs de s_3 dans V sont $\{-x_1^2+1, -x_2x_3+x_3, x_1x_3+x_1-x_3+2, x_1x_3+x_3, -x_2^2+1, x_1x_2-x_1-x_2+1, -x_3^2-x_3, \ldots\}$ et des séparateurs de s_4 dans V sont $\{x_1x_2-x_1, -x_2x_3+x_2+x_3+2, \ldots\}$.

Conclusion

Aussi, nous obtenons plusieurs candidats possibles aux Systèmes dynamiques polynomiaux dont notamment

$$f = (x_1x_3 - x_2x_3 + x_3, -x_1x_3 - x_2x_3 - x_3, -x_2^2 - x_1).$$

$\boldsymbol{s}_1 = (2,1,2)$, $\boldsymbol{s}_2 = (4,4,0)$, $\boldsymbol{s}_3 = (3,3,1)$, $\boldsymbol{s}_4 = (1,2,3)$; $S = \{1,2,3,4\}$. Nous additionnons, par exemple, d'abord les générateurs 2-à-2 $(p_{i,j} + p_{i,k})$ puis les soustrait $(p_{i,j} - p_{i,k})$, puis $2p_{i,j} + p_{i,k}$, etc ... puis on passe à $p_{i,1} + p_{i,2} + p_{i,3}$; Par exemple

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}_1} &= < x_1 + 3, x_2 + 4, x_3 + 3 > \\
CL(\boldsymbol{s}_1) &= \{0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 1, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1, 3x_1 - x_2 + x_3 + 3, \ldots, \\
&\quad x_2 - x_3 + 1, x_1 + x_2 + 2x_3 + 3, 3x_1 + 2x_2 + 2, \ldots, \mathbf{2x_1 + 2x_2 - 1}, \ldots\} \\
\mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}_2} &= < x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 > \\
CL(\boldsymbol{s}_2) &= \{-x_2 + 4, -x_1 - x_2 - x_3 + 3, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3, 3x_1 - x_2 + x_3 + 2, \\
&\quad -x_1 - x_3 + 4, 3x_1 + x_3 + 3, 2x_1 + x_2 + x_3 + 3, x_1 + x_2 + 3x_3 + 2, \\
&\quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4, x_1 + 3x_2 + x_3 + 4 \quad \mathbf{2x_1 + 2x_2 - 1}, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4, \ldots\} \\
\mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}_3} &= < x_1 + 2, x_2 + 2, x_3 + 4 > \\
CL(\boldsymbol{s}_3) &= \{-x_2 + 3, 3x_1 + 3x_2 + 2, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2, 3x_1 - x_2 + x_3 + 3, \\
&\quad \ldots, x_1 - x_2 + 3x_3 + 2, x_1 + 3x_3 + 4\} \\
\mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}_4} &= < x_1 + 4, x_2 + 3, x_3 + 2 > \\
CL(\boldsymbol{s}_4) &= \{-x_1 - x_2 - x_3 + 1, 3x_1 - x_2 + x_3 + 1, -x_1 - x_3 + 4, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4, \\
&\quad \mathbf{2x_1 + 2x_2 - 1}, x_1 + 3x_3, 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3, -x_2 + 2 \ldots\}
\end{aligned}
$$

Nous trouvons rapidement le séparateur $2x_1 + 2x_2 - 1$ de s_3 que l'on peut aussi retrouver par une identification linéaire. $r_3 = 2x_1 + 2x_2 - 1$ est un élément de $(\cap_{i \neq 3} CL(\boldsymbol{s}_i))$ qui n'appartient pas à $CL(\boldsymbol{s}_3)$. Dans cet exemple il n'est pas possible de trouver des séparateurs affines de s_1, s_2 et s_4. D'une façon générale,

$$r_j \in \cap_{i \neq j} \mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}_i}$$

et

$$r_j \notin \mathfrak{M}_{\boldsymbol{s}_j}$$

pour tout séparateur r_j de $\boldsymbol{s}_j$ dans V.